

Translação

1) Equações Básicas:

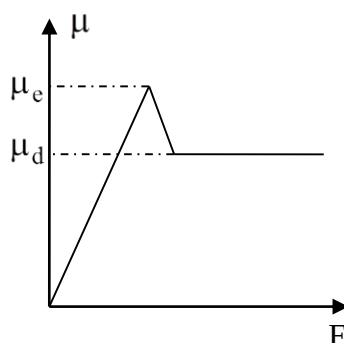
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = m \cdot a_{Gx} \\ \sum F_y = m \cdot a_{Gy} \end{cases}$$

Temos ainda que: $\sum \vec{M}_O = I_O \cdot \vec{\alpha} + m \cdot (\vec{G} - \vec{O}) \wedge \vec{a}_O$.

Sabendo que na translação pura $\vec{\alpha} = 0$ e se tomarmos o ponto G como pólo dos momentos, teremos:

$$\sum M_G = 0$$

2) Coeficiente de Atrito:

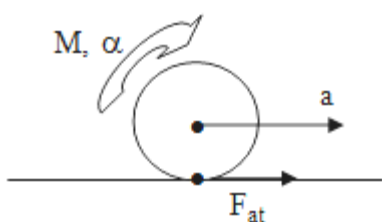


μ_e = iminência do escorregamento ou na aceleração máxima

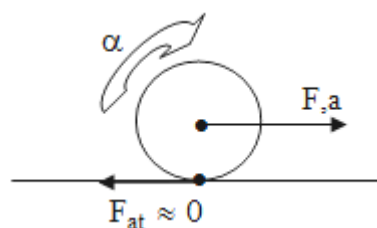
μ_d = em escorregamento

$$F_{at} = \mu N$$

Rodas com tração:



Rodas sem tração:



3) Acelerações Tangencial e Normal: (Usadas em translação curvilínea)

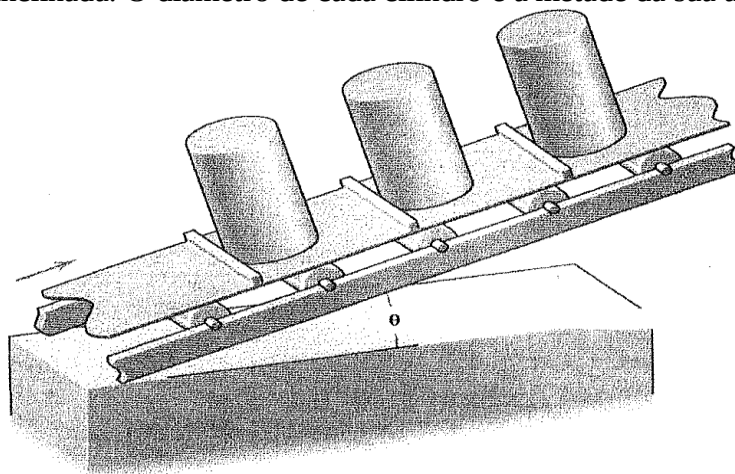
$$a_t = \alpha R \text{ e } a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

Obs.: i) Se o ponto não fizer curva, $a_n = 0$.

ii) Se v é cte, $a_t = 0$.

iii) Na iminência do movimento ou no instante inicial temos: $\omega = 0$ e $a_n = 0$.

1. (P3 - 2012) Uma esteira transportadora com ressaltos transporta cilindros sólidos homogêneos para cima de uma rampa inclinada. O diâmetro de cada cilindro é a metade da sua altura. Determine:

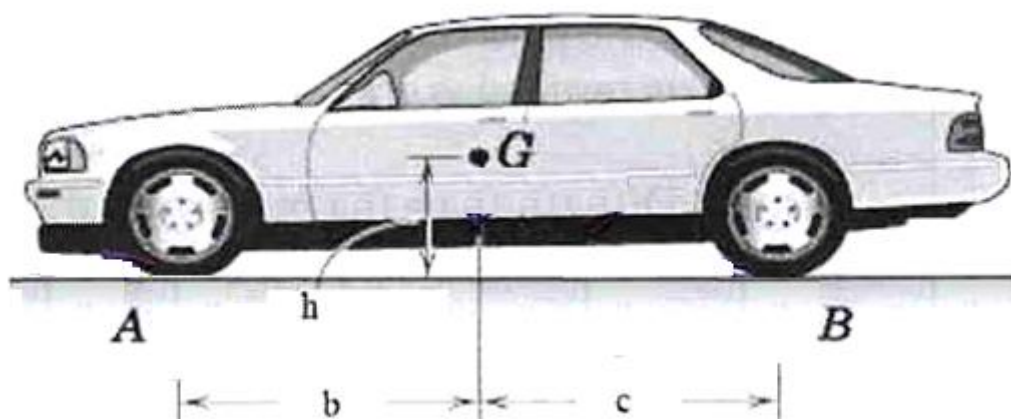


Dados: massa de cada cilindro = m aceleração da gravidade = g

- a aceleração máxima que a esteira pode ter sem que os cilindros tombem quando ela parte. (Faça também o DCL)
- para esta aceleração, as componentes da força reativa da esteira sobre um cilindro.

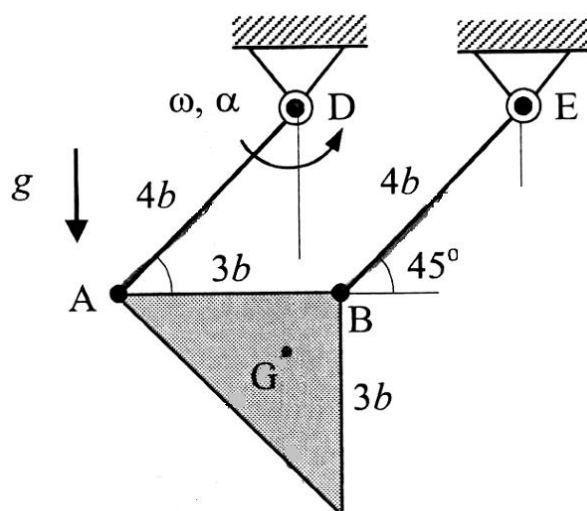
2. (P3 – 2015) O carro de massa m tem seu centro de massa posicionado em G. Na fase inicial do projeto do sistema de freios, deseja – se analisar o comportamento do veículo durante a frenagem. O coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada é μ . Para isso, pede - se:

- o DCL do carro, na própria figura.
- As forças normais N_A e N_B entre a estrada e os pares de rodas dianteiro e traseiro durante a frenagem, em função de uma certa desaceleração a .
- a desaceleração máxima do veículo durante a frenagem.
- a força de frenagem no par de rodas dianteiro na condição do item c.

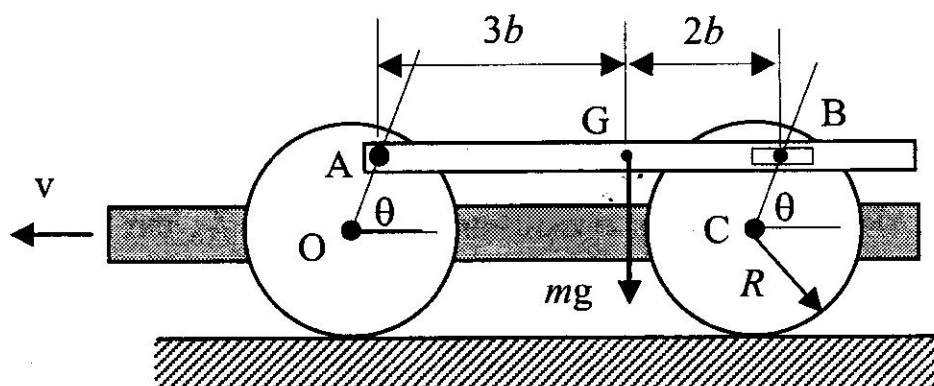


3. (P3 – 2015) A placa na forma de um triângulo isósceles de catetos $3b$ tem massa m e é suspensa por dois cabos de comprimento $4b$. Sabe-se que no instante representado na figura a velocidade angular dos cabos é ω . Para o instante indicado, quando os cabos estão inclinados de 45° em relação à horizontal, pede-se:

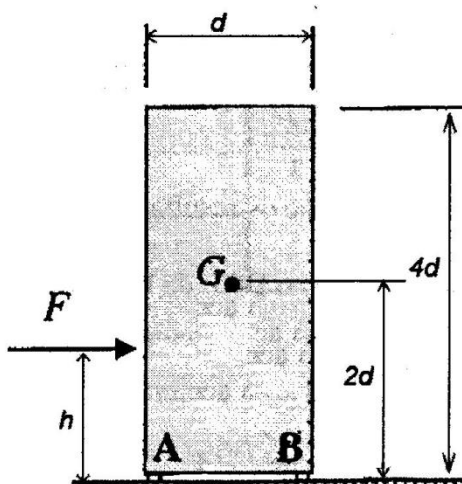
- Faça o DCL da placa na própria figura.
- Determine a aceleração do cabo, α .
- Determine a força de tração T_A .
- Determine a força de tração T_B .



4. (P3 - 2013) Duas rodas idênticas estão montadas numa viga central e rolam sem deslizar sobre um plano horizontal. A viga central move-se para a esquerda com velocidade constante v . A barra conectora AB tem massa m e está pivotada à roda dianteira em A. O pino B da segunda roda desliza sem atrito na ranhura horizontal da barra AB, que permanece horizontal durante o movimento. Para o instante em que o raio AO forma com a horizontal um ângulo θ , determine as forças em A e B, atuantes na barra. Dados: Raio das rodas: R ; distâncias $AO = CB = r$.

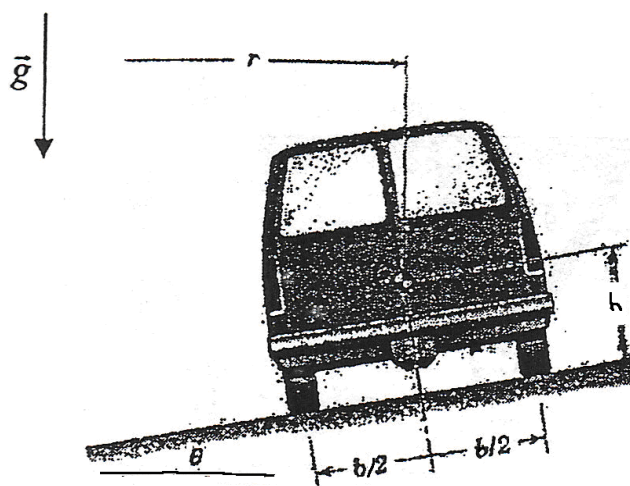


5. (P3 – 2014) Um bloco de massa m e baricentro em G é sustentado pelos pés de apoio A e B. Este bloco está sendo movimentado pela ação da força F , indicada na figura. O coeficiente de atrito dinâmico entre os pés do bloco e o piso é μ . Determine, em função dos dados do problema:



a) O DCL do bloco. b) A aceleração do bloco. c) A altura h para que o bloco não tombe.

6. (P3 - 2013) A van está trafegando a uma velocidade constante v em uma curva de raio médio r , com super elevação de ângulo θ (curva à esquerda em uma pista inclinada para o centro). O coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é μ . Observe que as forças e a aceleração estão contidas no plano da figura, o que faz com que o problema possa ser tratado como um movimento plano, apesar da velocidade ser normal a esse plano. A fim de analisar o desempenho da van em curvas, pedem - se:



a) a máxima velocidade antes que a van tombe. (Faça também o DCL)
b) a máxima velocidade antes que a van deslize.
c) a máxima velocidade antes que a van tombe para $\theta = 0^\circ$.
d) a máxima velocidade antes que a van deslize para $\theta = 0^\circ$.

Momento de Inércia

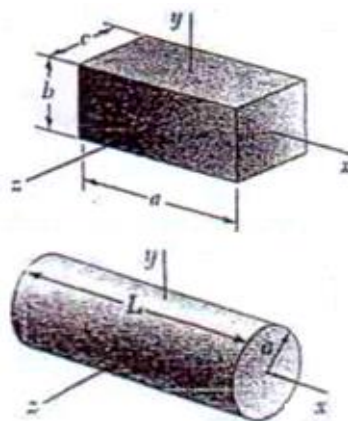
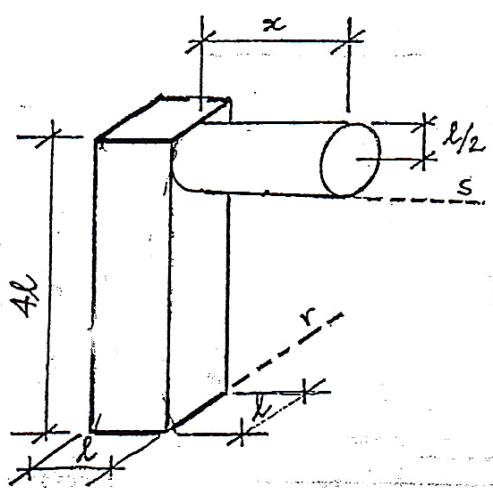
Momento de inércia é a dificuldade de girar uma figura plana (área) ou sólido ao redor de um eixo . Quando o eixo em questão não for tabelado, podemos calcular usando o **Teorema de Steiner**:

$$\text{Momento de Inércia de Massa: } J = md^2 \Rightarrow \begin{cases} J_x = J_{\bar{x}} + my^2 \\ J_y = J_{\bar{y}} + mx^2 \end{cases}$$

$$\text{Momento de Inércia de Área: } I = Ad^2 \Rightarrow \begin{cases} I_x = I_{\bar{x}} + Ay^2 \\ I_y = I_{\bar{y}} + Ax^2 \end{cases}$$

$$\text{Equivalência entre } I \text{ e } J: J = \frac{m}{A} \cdot I$$

7. (P3 - 2009) A peça ilustrada na figura abaixo é homogênea e possui densidade μ , composta por um prisma retangular e um cilindro. Determine:



$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{12} m(b^2 + c^2) \\ I_y &= \frac{1}{12} m(c^2 + a^2) \\ I_z &= \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{2} ma^2 \\ I_y = I_z &= \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2) \end{aligned}$$

a) O momento de inércia do prisma retangular em relação ao eixo r.

b) O comprimento x do cilindro se o seu momento de inércia em relação ao eixo s é $\frac{3}{16} \mu \pi L^5$.

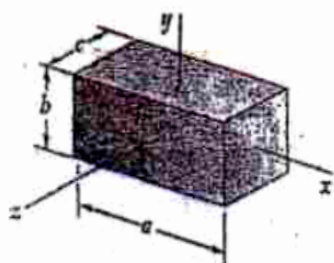
Produto de Inércia

Produto de inércia mede a anti-simetria de uma distribuição de área (ou massa) em relação a um par de eixos. Sendo G o baricentro da figura em questão, temos:

Produto de Inércia de Massa:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{\overline{xy}} + m x_G y_G \\ J_{xz} &= J_{\overline{xz}} + m x_G z_G \\ J_{yz} &= J_{\overline{yz}} + m y_G z_G \end{aligned}$$

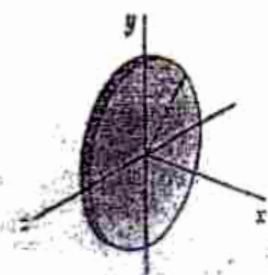
Temos ainda que $m = \rho.V = \rho.A.e$, onde ρ é a densidade e e é a espessura. Logo $J = \rho.e.I$.



$$I_x = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$

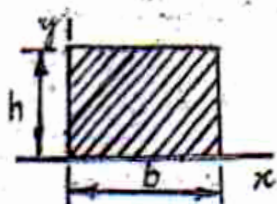
$$I_y = \frac{1}{12} m (c^2 + a^2)$$

$$I_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$



$$I_x = \frac{1}{2} m r^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4} m r^2$$



$$I_x = \frac{m b^3}{12}$$

$$I_y = \frac{m a^3}{12}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \vec{\omega} \wedge (\vec{P} - \vec{Q}) - \omega^2 (\vec{P} - \vec{Q})$$

(movimento plano).

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} \text{ (vetor aceleração angular).}$$

$$J_r = J_g + m d^2$$

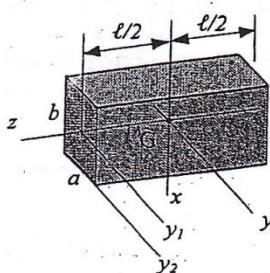
$$J_{xy} = J_{\overline{xy}} + m x_G y_G$$

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_G$$

$$\Sigma \vec{M}_O = m(\vec{G} - \vec{O}) \wedge \vec{a}_O + J_O \vec{\omega}$$

Se O for ponto fixo: $\Sigma \vec{M}_O = J_O \vec{\alpha}$

Se O $\equiv$ G : $\Sigma \vec{M}_G = J_G \vec{\alpha}$



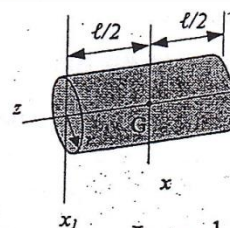
$$J_x = \frac{1}{12} m (a^2 + l^2)$$

$$J_y = \frac{1}{12} m (b^2 + l^2)$$

$$J_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{12} m b^2 + \frac{1}{3} m l^2$$

$$J_{y_2} = \frac{1}{3} m (b^2 + l^2)$$

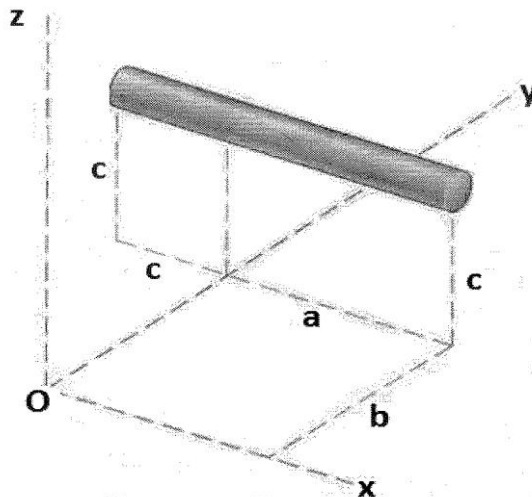


$$J_{x_1} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$$

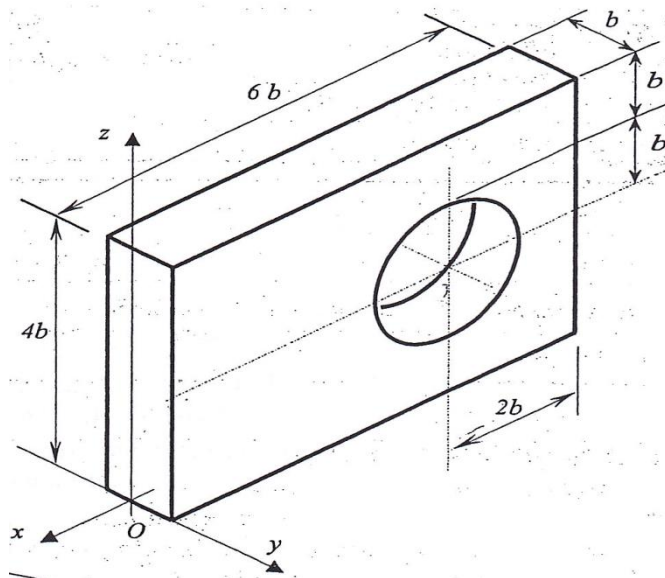
$$J_{x_2} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{3} m l^2$$

$$J_z = \frac{1}{2} m r^2$$

8. (P3 - 2013) Determine os produtos de inércia do cilindro homogêneo sólido de massa m para os eixos x , y e z .



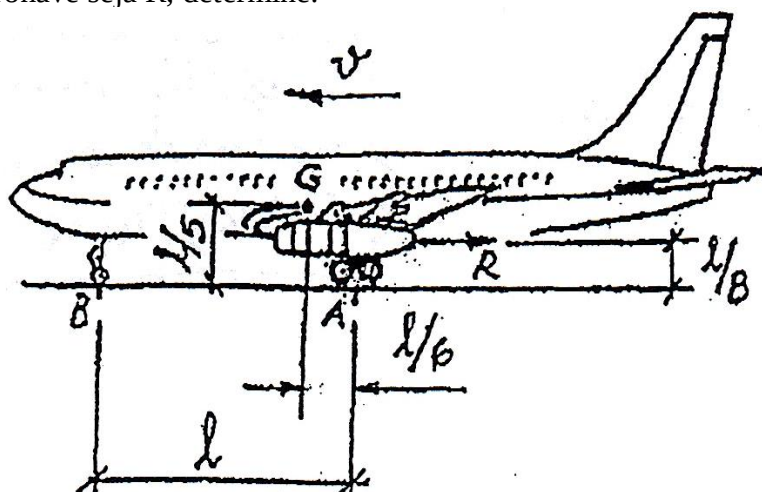
9. (P3 – 2014) A peça representada abaixo é uma placa de espessura b com furo circular de raio b . O plano Oxz passa pelo meio da espessura. A peça é composta da placa sem furo, sólido 1, e um cilindro de raio b e altura b , sólido 2, que deve ser removido da placa. A densidade do material é ρ . Determine:



- o momento de inércia J_y^1 do sólido 1 (sem furo), em relação ao eixo y .
- o momento de inércia J_y^2 do sólido 2, em relação ao eixo y .
- o momento de inércia J_y da placa com furo, em relação ao eixo y .
- o produto de inércia J_{xz}^1 do sólido 1.
- o produto de inércia J_{xz}^2 do sólido 2.
- o produto de inércia J_{xz} da placa com furo.
- o produto de inércia J_{yz}^1 do sólido 1.

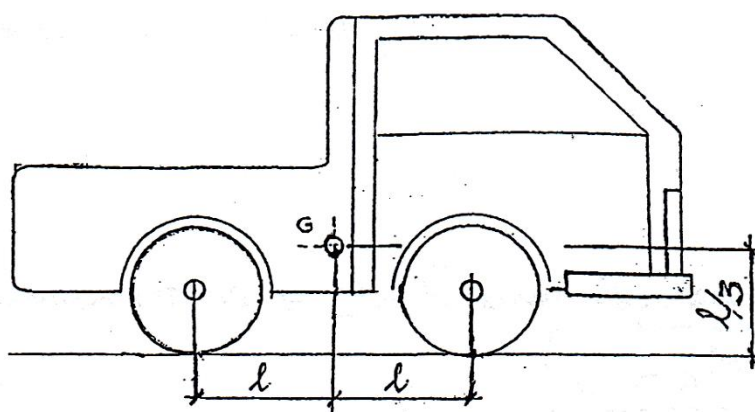
Exercícios Extras

10. (P3 - 2008) Um avião a jato de massa m ao longo da pista de pouso, antes da frenagem mecânica, fica submetido a uma desaceleração constante igual a $g/3$ devido ao acionamento dos inversores de empuxo (na figura representado pela força R). Admitindo que a única força que provoca a desaceleração da aeronave seja R , determine:



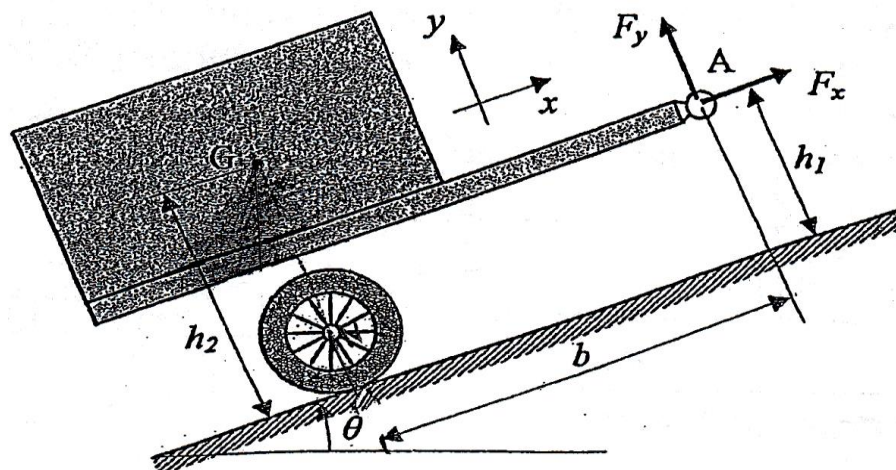
- A reação normal sob a roda dianteira B.
- A força R .

11. (P3 - 2008) Uma caminhonete de tração traseira possui massa m e realiza movimento retilíneo uniformemente acelerado com aceleração a . Sendo g a aceleração da gravidade e desprezando a massa das rodas, determine:



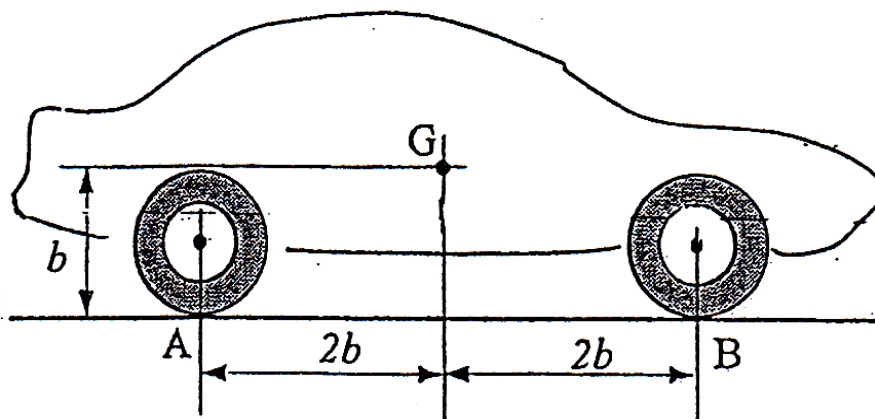
- A força de atrito debaixo das rodas motrizes traseiras.
- A força normal debaixo do par de rodas traseiras.
- O coeficiente de atrito mínimo para suportar a força de atrito calculada no item a.

12. (P3 - 2011) O reboque carregado possui uma massa m com centro de massa G e está preso em A a um engate no pára-choque traseiro de um veículo (não mostrado). Sabe-se que o veículo está subindo uma ladeira de inclinação θ , com aceleração a . Despreze a pequena força de atrito exercida sobre as rodas, que têm inércia desprezível. Pede-se:



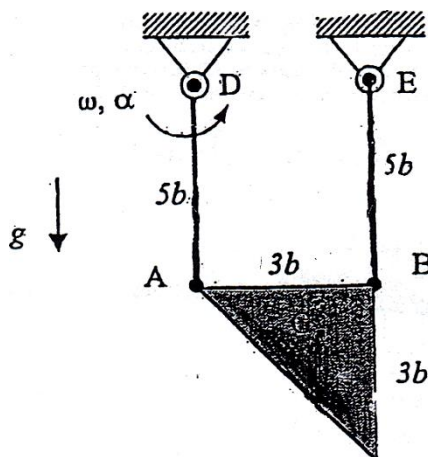
- a) Faça o DCL do reboque. b) Calcule as forças F_x e F_y aplicadas em A .
Expresse os resultados em função de m , a , θ , b , h_1 e h_2 .

13. (P3 - 2010) Um veículo de tração dianteira e massa m parte do repouso em uma rampa de inclinação θ , com aceleração a . Despreze a inércia das rodas quando comparadas à inércia do veículo. Determine:



- a) a força normal atuante nos pneus traseiros em função de m , g , a , θ e b .
b) a força normal atuante nos pneus dianteiros em função de m , g , a , θ e b .
c) Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o solo é μ , determine a máxima aceleração que o veículo pode atingir.

14. (P3 - 2011) A placa na forma de triângulo retângulo isósceles de catetos $3b$ tem massa m e é suspensa por dois cabos de comprimento $5b$. Sabe-se que no instante em que os cabos estão na vertical, a velocidade angular dos cabos é ω . Para o instante indicado:

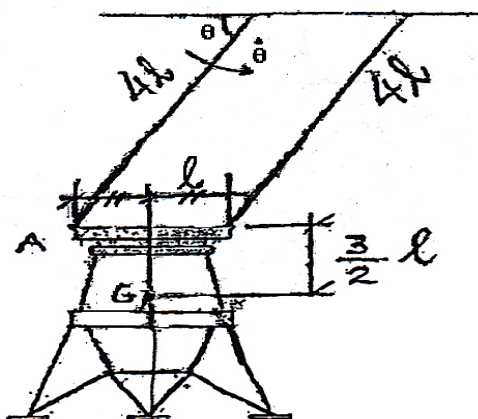


- a) faça o DCL da placa. b) determine a aceleração α do cabo.
c) determine a força de tração T_B . d) determine a força de tração T_A .

Expresse as respostas em função de ω , b , g e m .

O segmento AB se mantém paralelo ao segmento DE.

15. (P3 - 2010) Testes do projeto da sequência de pouso para módulo de excursão lunar são realizados usando o modelo de pêndulo suspenso por cabos paralelos. O modelo possui uma massa m com centro de massa em G. No instante esquematizado o cabo forma um ângulo θ com a horizontal e possui velocidade angular $\dot{\theta}$.



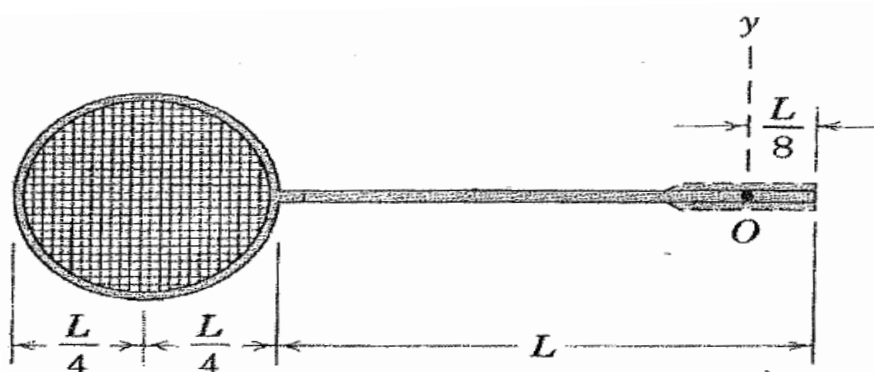
- a) Escreva as duas equações escalares decorrentes da equação vetorial $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$, utilizando a base $\vec{\tau}$, $\vec{n}$. (indique no desenho as forças atuantes no módulo)
b) A aceleração angular do módulo no instante esquematizado.
c) A equação escalar decorrente da equação vetorial $\sum \vec{M}_O = I_O \cdot \ddot{\theta} + m \cdot (\vec{G} - \vec{O}) \wedge \vec{a}_O$, quando se toma o pólo em G.

Bibliografia:

16. (P3 - 2012) Uma raquete de *Badminton* é feita de hastes esbeltas uniformes dobradas na forma mostrada na figura. Despreze os fios e o cabo de madeira e estime o momento de inércia de massa em torno do eixo y que passa por O , que é a posição da mão do jogador. A massa por unidade de comprimento do material da haste é ρ .

Dados: Momento de inércia de uma circunferência de raio r em relação a um eixo paralelo ao eixo y passando por seu centro de gravidade: $\frac{1}{2}mr^2$. Momento de inércia de um retângulo em relação a

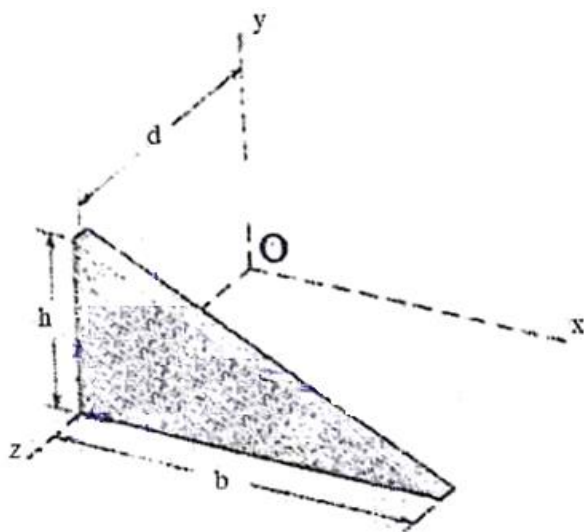
um eixo paralelo ao eixo y passando pelo centro de gravidade: $\frac{1}{12}mb^2$, onde b é base do retângulo.



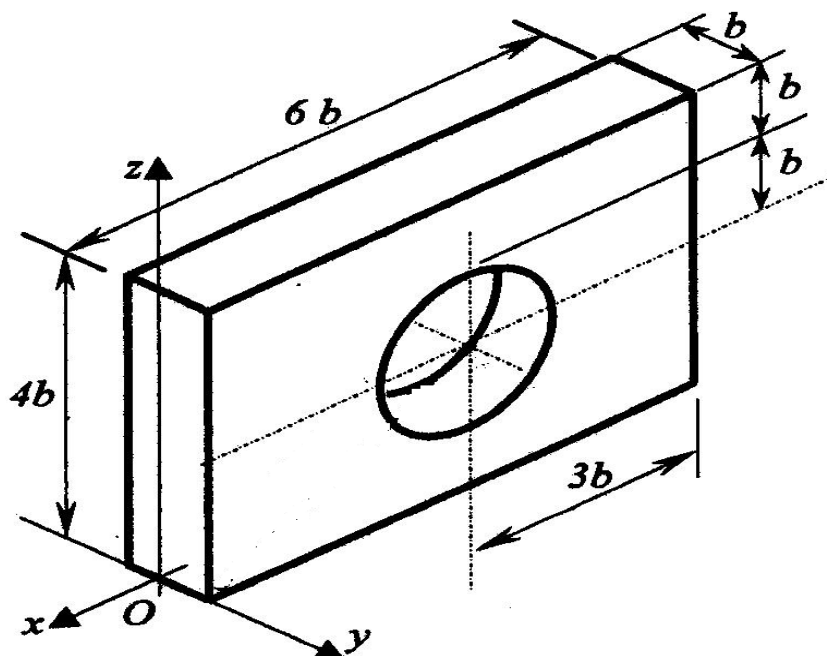
17. (P3 – 2015) A placa plana triangular da figura tem massa m . Determine para esta peça:

- o produto de inércia J_{xz} .
- o produto de inércia J_{yz} .
- o momento de inércia em relação ao eixo x .

Sabe-se que o momento de inércia de um triângulo em relação à sua base é $\frac{mh^2}{18}$.



18. (P3 – 2014) A peça representada ao lado é composta de uma placa de espessura b com um furo passante na forma de cilindro circular de raio b . O plano Oxz passa pelo meio da espessura da placa. A densidade do material é ρ . Determine para essa peça:



- a) o momento de inércia em relação ao eixo y .
- b) o produto de inércia em relação ao par de eixos xy .
- c) o produto de inércia em relação ao par de eixos xz .
- d) o produto de inércia em relação ao par de eixos yz .

Gabarito dos Extras

10. a) $N_B = \frac{23mg}{120}$ b) $R = \frac{mg}{3}$

11. a) $N_2 = \frac{m}{2} \cdot \left(g + \frac{a}{3} \right)$ Fat = ma b) c) $\mu = \frac{2a}{g + \frac{a}{3}}$

12. b) $F_x = m(g \sin \theta + a)$ e $F_y = \frac{m(g \sin \theta + a)(h_1 - h_2)}{b}$

$$13. \text{ a) } N_A = \frac{m.(2g \cos \theta + a + g \sin \theta)}{4} \quad \text{ b) } N_B = \frac{m.(2g \cos \theta - a - g \sin \theta)}{4}$$

$$\text{ c) } a_{\max} = \frac{\mu.(2g \cos \theta - g \sin \theta) - 4g \sin \theta}{4 + \mu}$$

$$14. \text{ b) } \alpha = 0 \quad \text{ c) } T_A = \frac{m.(g + 5b\omega^2)}{3} \quad \text{ d) } T_B = \frac{2m.(g + 5b\omega^2)}{3}$$

$$15. \text{ a) } \sum F_n = m.a_{Gn} \rightarrow T_A + T_B - mg \sin \theta = 4m\omega^2 L$$

$$\sum F_t = m.a_{Gt} \rightarrow mg \cos \theta = 4m\alpha_{\text{cabo}} L$$

$$\text{ b) } \alpha_{\text{cabo}} = \frac{g \cos \theta}{4L} \text{ e } \alpha_{\text{módulo}} = 0 \text{ (Translação curvilínea)}$$

$$\text{ c) } \sum M_G = 0 \rightarrow \frac{-3L}{2}(T_A + T_B) \cos \theta + L(-T_A + T_B) \sin \theta = 0$$

$$16. J_y = \left(\frac{43}{192} + \frac{83\pi}{128} \right) \rho L^3$$

$$17. \text{ a) } J_{xz} = \frac{mbd}{3} \quad \text{ b) } J_{yz} = \frac{mhd}{3} \quad \text{ c) } J_x = m \cdot \left(d^2 + \frac{h^2}{6} \right)$$

$$18. \text{ a) } J_y = \left(416 - \frac{27\pi}{2} \right) \rho b^5 \quad \text{ b) } J_{xy} = 0 \quad \text{ c) } J_{xz} = -6\rho b^5 (24 - \pi) \quad \text{ d) } J_{yz} = 0$$